**Bài 2. Số gần đúng, sai số tuyệt đối và tương đối**

1. **Sai số tuyệt đối và sai số tương đối**
2. ***Sai số tuyệt đối***

Nếu số gần đúng *a* có giá trị đúng là *a0* thì ta nói *a* xấp xỉ *a0* hay a là số gần đúng của a0. Khi đó sai số của *a* là:

*Ea = a - a0* (1.1)

Nhưng giá trị này nói chúng ta không biết được mà chỉ ước lượng được cận trên của trị tuyệt đối của nó.

*Định nghĩa*: Giá trị ước lượng *Δa* sao cho

 (1.2)

được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng *a*.

Sai số tuyệt đối nhỏ nhất có thể biết được gọi là sai số tuyệt đối giới hạn của *a*. Thông thường ước lượng sai số tuyệt đối giới hạn là khó và nhiều khi không cần thiết nên người ta chỉ cần ước lượng sai số tuyệt đối đủ nhỏ và dùng từ 1 đến 3 chữ số có nghĩa (là số chữ số bắt đầu từ chữ số khác không đầu tiên từ trái sang phải – xem mục 2.1) để biểu diễn sai số tuyệt đối của số gần đúng.

Thay cho (1.2) người ta còn dùng cách biểu diễn sau để chỉ sai số tuyệt đối của

 (1.3)

Trong thực tế thì sai số *Ea* không thể biết được nên khi không có sự hiểu lầm người ta còn dùng từ *sai số* để chỉ sai số tuyệt đối *Δa* .

*Ví dụ*: Căn phòng có chiều dài *d* =5,45 *m* và chiều rộng *r* = 3,94 *m* với sai số 1 *cm*. Khi đó ta hiểu là:

*Δd* = 0,01 *m* hay *d* = 5,45 ± 0,01 *m*

*Δr* = 0,01 *m* hay *d* = 3,94 ± 0,01 *m*

Như vậy diện tích của phòng được ước lượng bởi

*S = d.r* = 5,45. 3,94 = 21,473 *m2*

với cận trên và cận dưới của *S* là

(5,45 - 0,01)(3,94 - 0,01) = 21,3792 ≤ S ≤ (5,45 + 0,01)(3,94 + 0,01) = 21,567

Vậy ta có ước lượng sai số tuyệt đối của S là

 m2

hoặc làm tròn cho gọn là 0,1 *m2.*

1. ***Sai số tương đối***

Hai số gần đúng có cùng sai số tuyệt đối sẽ có *“mức độ chính xác”* khác nhau nếu độ lớn của chúng khác nhau, số bé hơn sẽ có độ chính xác kém hơn. Để biểu diễn độ chính xác này người ta dùng sai số sai số tương đối.

*Định nghĩa*: Sai số tương đối của số gần đúng *a* là tỷ số giữa sai số tuyệt đối và giá trị tuyệt đối của nó, được ký hiệu là *δa*.

 (1.4)

Thường sai số tương đối được biểu diễn dưới dạng phần trăm với 2 hoặc 3 chữ số .

Từ (1.4) ta thấy nếu biết *δa* thì

 (1.5)

nên ta chỉ cần biết một trong hai loại sai số của nó là được.

*Ví dụ*: Nếu *a* = 57 và *Δa* = 0,5 thì *δa* = 0,0087719 hoặc 0,88% (gọn hơn 0,9%)

1. **Các loại sai số khác**

Để hình dung các loại sai số khác ta xét ví dụ sau:

* + - 1. ***Ví dụ***

Một vật thể rơi từ độ cao *H0* với vận tốc ban đầu *v0* (được đo nhờ thiết bị nào đó). Tính độ cao *H(t)* của vật thể sau thời gian *t*.

Bài toán có thể giải như sau:

Nếu gọi ngoại lực tác động vào vật thể là *F(t)* (gồm lực hút trọng trường và lực cản), khối lượng vật thể là m thì *H(t)* là nghiệm của phương trình vi phân cấp hai

 (1.6)

với điều kiện ban đầu 

Ta chọn một phương pháp gần đúng để giải phương trình này, chẳng hạn nếu giả thiết  không đổi thì

.

Qua ví dụ trên ta thấy sai số của kết quả nhận được chịu ảnh hưởng của các số đo H0, v0 ; cách lập luận để xác định F(t) ; phương pháp giải phương trình (1,6) và các yếu tố ngẫu nhiên khác. Theo các yếu tố ảnh hưởng tới kết quả tính toán ta phân ra các loại sai số sau.

1. ***Các loại sai số***

* Sai số dữ liệu (còn gọi là sai số của số liệu ban đầu). Trong thí dụ trên là sai số khi đo *H0* và *v0*.
* Sai số giả thiết. Sai số này gặp phải khi ta đơn giản hoá bài toán thực tiễn để thiết lập mô hình toán học có thể giải được. Trong thí dụ trên có thể giả thiết ngoại lực chỉ là trọng lực.
* Sai số phương pháp. Là sai số của phương pháp giải gần đúng bài toán theo mô hình được lập. Trong thí dụ trên là phương pháp giải phương trình vi phân (1.6)
* Sai số tính toán. Là sai số tích luỹ trong quá trình tính toán theo phương pháp được chọn.
* Sai số làm tròn. Khi tính toán ta thường phải làm tròn các số nên ảnh hưởng tới kết quả nhiều khi rất đáng kể.
* Sai số ngẫu nhiên. Là sai số chịu các quy luật chi phối ngẫu nhiên không tránh được.

Về sau ta quan tâm tới sai số tính toán và sai số phương pháp.